Quantitative arithmetic of projective varieties (T. D. Browning) Premi Ferran Sunyer i Balaguer 2009

L'aritmètica quantitativa de varietats projectives no és sinó el punt de vista modern d'un tema, les equacions diofàntiques, que, com diu l'autor, és gairebé tan vell com les matemàtiques mateixes. Es tracta de determinar, en la mesura que es pugui, el conjunt de solucions senceres d'equacions algebraiques amb coeficients sencers. Sigui, doncs, $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomi en n variables amb coeficients sencers, i sigui

$$S_f = \{\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} : f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Ens interessa especialment distingir els casos en què el conjunt és buit, finit, o infinit i, en aquest darrer cas, donar una fórmula que pugui descriure d'alguna manera la quantitat de solucions que hi ha en relació amb la seva grandària.

La resposta, en primer lloc, depèn de la dimensió i, en aquest sentit, el problema millor estudiat és el cas $n = 2$. La teoria de corbes en general i, en particular, les corbes el·líptiques ocupa una part considerable de la literatura actual en teoria de nombres. I, malgrat tot, aspectes bàsics del problema romanen encara oberts. El coneixement actual en el cas de varietats algebraiques de major dimensió, $n \geq 3$, és molt més escàs, i es redueix a una sèrie de resultats puntuals i a una col·lecció de conjectures. La present monografia, guanyadora del Premi Ferran Sunyer i Balaguer 2009 i exactament dedicada a aquest cas, podria suposar un començament d'un estudi més sistemàtic del problema en dimensions superiors.

Una primera observació important és que, com bé indica el títol, l'estudi es restringeix a varietats projectives. Hi ha alguns motius trivials pels quals una equació diofàntica no pot tenir solució, per exemple, quan l'equació no té solucions reals. A part d'això, en el cas de dimensió gran, un senzill raonament heurístic indica que, donada una forma de grau d en n variables, el nombre de solucions de S_f de mida B hauria de ser de l'ordre de B^{n-d}. I, en particular, quan $n > d$ tindrà infinites solucions. És, doncs, interessant estudiar el comportament asimptòtic de la funció

$$N(f, B) = \#\{\mathbf{x} \in S_f : ||\mathbf{x}|| \leq B\},$$

quan $B \to \infty$, on $|| \cdot ||$ és una determinada norma.

La selecció de varietats projectives no és ingènua. Efectivament, T. D. Browning és un expert en teoria analítica de nombres, i aquest és l'enfocament que s'adopta al llarg de la monografia a fi d'atacar el problema. Ara bé, només cal fer un breu repàs a les principals eines utilitzades en aquesta disciplina: funcions zeta i L, garbell, caràcters, funció μ, formes bilineals, etc., per a observar que aquesta teoria està especialment dissenyada per capturar i aprofitar la natura multiplicativa del problema. Mentre les formes homogènies són clarament multiplicatives, aquesta condició es perd completament en considerar formes afins en general.

Però encara, fins i tot dins de les formes homogènies, el problema segueix sent inabastable en general actualment. Així i tot, hi ha diversos casos en els quals se'n té major coneixement. En primer lloc tenim el cas en què el nombre de variables és molt major que el grau de la forma. Efectivament, en aquest cas Birch va ser capaç de provar que per a formes no singulars amb un número exponencial de variables en funció del seu grau, l'argument heurístic duu a la resposta correcta. El motiu que fa aquest tipus de problemes assequibles és que, quan la dimensió és molt superior al grau, el mètode del cercle de Hardy-Littlewood és molt efectiu. Concretament es comença amb la senzilla identitat $N(f, B) = \int_0^1 S(\alpha) d\alpha$, on

$$S(\alpha) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap [-B,B]^n} \exp(2\pi i \alpha f(\mathbf{x})).$$

Ara bé, hom espera que els nombres $\exp(2\pi i \alpha f(\mathbf{x}))$, excepte per a α racional amb denominador petit, estiguin distribuïts de forma aleatòria al voltant del cercle unitat, quan fem variar $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$. Això, via el teorema central del límit, ens duu a pensar que $S(\alpha)$ hauria de ser normalment més o menys de l'ordre de $B^{n/2}$. Tenint en compte que el nostre raonament heurístic ens diu que $N(f, B) \sim B^{n-d}$, solament podem esperar que aquest mètode funcioni per a dimensions $d > n/2$. En el capítol 8 del llibre

s'inclou una descripció del mètode, així com una prova del teorema de Birch en el cas $d = 4$.

L'estudi de la funció de comptar es pot atacar de dues formes diferents: via l'acció d'un grup en la varietat o, més en general, via el torsor universal. En el primer cas, un estudi de la funció zeta d'altura associada al conjunt de solucions racionals, juntament amb les tècniques analítiques associades, tipus teoremes tauberians, pot arribar a donar resultats satisfactoris. Quant al segon cas, el mètode d'atac és el següent: 1) es construeix una bijecció explícita entre punts racionals d'altura fitada i punts sencers en una regió del torsor universal. Una vegada situats en aquesta nova varietat, la teoria analítica de nombres permet, d'una banda, 2) estimar l'error comès en aproximar el nombre de punts de coordenades senceres en aquesta regió pel volum de la regió i, de l'altra, 3) mostrar que aquest volum creix d'una forma determinada.

L'any 1990, Manin va predir el terme principal del creixement del volum i aquest, restringit a varietats de Fano, és l'objecte del capítol 2 del llibre. Concretament, Manin va conjecturar l'existència de $\lim_{B\to\infty} \frac{\log NV(B)}{\log B}$ i el va relacionar amb un invariant geomètric de la varietat via el con de divisors efectius. Tot i existir casos en què la conjectura està provada, com és el de les varietats tòriques, en general se n'està molt lluny, i l'única cosa que existeixen són fites superiors lluny del veritable ordre de magnitud. En la taula 2.4 l'autor inclou una sèrie de problemes oberts per al lector interessat en el tema. Pot ser interessant fer notar que el millor resultat que es coneix és condicional a la certesa de la hipòtesi de Riemann.

En general, les fites segueixen la coneguda conjectura del creixement dimensional, $N_V(B) \ll B^{dim(V)} + \epsilon$, formulada per a qualsevol varietat irreductible, i estudiada en el capítol 3. Gràcies a la projecció birracional, la conjectura es pot restringir a hipersuperfícies irreductibles donades per una forma $F(\mathbf{x})$. Una vegada en aquest context, l'observació trivial que, per a qualsevol primer p, es té $N_V(B) \leq \#\{|\mathbf{x}| \leq B : p|F(\mathbf{x})\}$, permet reduir el problema en termes de sumes exponencials en cossos finits. L'anàlisi de Fourier és ara qui permet completar les sumes i controlar la irregularitat que prové del truncament a altura B. La novetat que proposa l'autor, juntament amb Heath-Brown, és provar que els punts racionals de la varietat cauen en un nombre petit d'espais lineals, més fàcil d'estimar, amb coeficients petits, i això ens dóna una estimació acceptable. Aquesta tècnica, inspirada en la iniciada per Bombieri i Pila en el seu estudi de corbes, la generalitza primer Heath-Brown, i la desenvolupa l'autor en el capítol 4, fent una partició p-àdica de la varietat. Arribats a aquest punt, la geometria dels nombres, és a dir, un estudi adequat de reticles mòdul primers, ens proporciona les fites desitjades. En aquest capítol també s'inclou un estudi més o menys detallat sobre reticles.

Els capítols 5 i 6 presenten la demostració completa per a dos tipus de superfícies del Pezzo singulars. Quan la singularitat és del tipus A_1 estem considerant superfícies de grau 6, no tòriques, i el pas al torsor universal i la fórmula de Perron per controlar l'error permeten, no només demostrar les conjectures de Manin en aquest cas, sinó que estableixen la fórmula asimptòtica $N_V(B) = c_1 B(\log B)^3 + c_2 B(\log B)^2 + O(B(\log B))$, on c_1 és una sèrie singular explícita. Per al cas de cúbiques singulars del tipus D_4, tractades en el capítol 6, sense la funció zeta d'altura al nostre servei, el pas al torsor universal només permet obtenir una fita superior de l'ordre de magnitud correcte, estimant el nombre de solucions d'equacions en congruències.

Finalment, l'autor dedica el capítol 7 a l'estudi de superfícies no singulars. En aquest cas, recobrint aquesta vegada la varietat per hiperplans, i gràcies al lema de Siegel que estableix una fita en l'altura dels hiperplans a utilitzar, i la varietat dual, s'obté una fita vàlida per a superfícies no singulars de qualsevol grau. Resulta interessant destacar la fita $N_V(B) \ll B^{5/4+\varepsilon}$ en el cas d'intersecció de quàdriques (sense les setze línies que contenen). Aquest resultat està condicionat a una coneguda hipòtesi de corbes el·lípticas sobre $\mathbb{Q}$ que dóna una fita del rang en termes del conductor de la corba.

El meu agraïment per a Sebastià Martín, per haver llegit aquest article, i per la seva traducció al català.

Jorge J. Urroz
UPC